Séries de Fourier

Rappels nécessaires :

$\{x_k\}$ suite orthonormée complète dans un E.H. V $\Longrightarrow$ (F) $\begin{cases} f = \sum_{j=1}^{\infty} (x_j, f)\, x_j & \leftarrow \text{coeff. de Fourier} \\ \|f\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(x_j, f)|^2 & \leftarrow \text{égalité de Parseval} \\ (f, g) = \sum_{j=1}^{\infty} (f, x_j)(x_j, g) \end{cases}$

Nous allons étudier le cas particulier suivant :

$V = V_T =$ fonctions de période fixe T, bornées et intégrables sur une intervalle-période $\Big\}$ base naturelle $\{e^{2\pi i n t/T}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $e^{2\pi i n t/T} = x_n$

- un problème : difficile à dire si V_T est complet
- difficile à dire si $\{x_n\}$ est complet
- les relations (F) ont pourtant lieu en général ; il faut donc préciser – si $\sum (x_j, f) x_j$ converge vers f, alors dans quels sens ? (convergence simple/uniforme/normale).

§1. Notations

Déf. 1 Soit $T \in \mathbb{R}_{>0}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. On dira que f est T-périodique si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t+T) = f(t)$.

La donnée d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ équivaut à la donnée de 2 fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ($\varphi_1 = \operatorname{Re} f$ et $\varphi_2 = \operatorname{Im} f$).

Soit f T-périodique, bornée et intégrable sur une intervalle-période. Alors :

- f est intégrable sur toute intervalle bornée,
- $\int_a^b f(t)\,dt = \int_{a+nT}^{b+nT} f(t)\,dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z},\ \forall a, b \in \mathbb{R}$
- $\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt, \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Les fonctions T-périodiques, bornées, intégrables sur une intervalle-période constituent un espace vectoriel (sur $\mathbb{C}$) noté V_T.

Pour $f, g \in V_T$ on définit la forme hermitienne

$$(f, g) = \frac{1}{T} \int_0^T \overline{f(t)}\, g(t)\, dt$$

Propriétés:

$$\text{sesquilinéarité} \begin{cases} (f, g_1 + g_2) = (f, g_1) + (f, g_2) & \forall f, g_1, g_2 \in V_T \\ (f, \lambda g) = \lambda (f, g) & \forall f, g \in V_T,\ \forall \lambda \in \mathbb{C} \\ (f, g) = \overline{(g, f)} & \forall f, g \in V_T \end{cases}$$

$$(f, f) = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2\, dt \quad \text{est dans } \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Par contre, dans V_T $(f, f) = 0$ ne permet pas de conclure que $f = 0$ (contre-exemple: la fonction T-périodique nulle partout sauf en un point de la période). Il manque donc la propriété

$$(f, f) = 0 \longrightarrow f = 0$$

pour faire de la forme hermitienne (f, g) un véritable produit scalaire.

<u>Prop. 2</u> La fonction $x_n(t) = e^{2\pi i t n / T}$ $(n \in \mathbb{Z})$ est T-périodique. L'ensemble $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ constitue une famille orthonormée dans V_T par rapport au "produit scalaire" défini précédemment

$$(x_n, x_m) = \delta_{mn}$$

◀ $$(x_m, x_n) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{2\pi i (n-m) t / T}\, dt \circledequal$$

- si $m = n$, alors $\circledequal\ \frac{1}{T} \int_0^T dt = 1$
- si $m \neq n$, alors $\circledequal\ \frac{1}{T} \left. \frac{e^{2\pi i (n-m) t / T}}{2\pi i (n-m)/T} \right|_0^T = 0$ ▶

Motivés par les formules (F), on s'intéresse aux séries trigonométriques T-périodiques

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega t} \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{T} , \ c_n \in \mathbb{C} , \ t \in \mathbb{R} , \ n \in \mathbb{Z}.$$

On dira que cette suite est convergente si la série de fonctions

$$S_N(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t} \right)$$

converge lorsque $N \to \infty$. Donc, par définition:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \text{ converge et a pour somme } S(t) \iff \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega t} = S(t)$$

<u>Rem. 3</u> Lorsqu'on travaille avec les fonctions réelles il est commode d'écrire

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega t} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

(1) $$\begin{cases} c_n = \dfrac{a_n - i b_n}{2} \\ c_{-n} = \dfrac{a_n + i b_n}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases}$$

(pour les fonctions réelles, $c_n = c_{-n}^* \Rightarrow a_n, b_n \in \mathbb{R}$)

Quel type de convergence? (convergence p.r. au "produit scalaire" est trop faible)

<u>Rappels</u>:

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$ une série de fonctions d'une variable $t \in \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. Notons

$$S_N(t) = \sum_{n=0}^{N} u_n(t)$$

- Convergence simple vers $S(t)$. C'est la convergence, pour chaque valeur de t, de la suite des <u>nombres</u> complexes $S_N(t)$ vers le nombre. Pour chaque t (fixe) la suite $R_N(t) = S(t) - S_N(t) \to 0$ lorsque $N \to \infty$.

- Convergence uniforme sur une intervalle $I \subset \mathbb{R}$. $S_N(t)$ converge simplement vers $S(t)$ et

$$\sup_{t\in I} |R_N(t)| \to 0 \quad \text{pour } N\to\infty.$$

- Convergence normale sur $I \subset \mathbb{R}$. Il existe une série numérique convergente, à termes positifs v_n telle que $|u_n(t)| \leq v_n \quad \forall t \in I$.

<u>Exemple</u>. La suite $\{t^n\}_{n=0,1,2,\dots}$ converge simplement vers $f(t)=0 \quad \forall t \in (0,1)$. Par contre, nous n'avons pas de convergence uniforme sur I.

En effet, la convergence normale implique la convergence uniforme, qui elle-même implique la convergence simple.

<u>Rem. 4</u> Supposons que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega t}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $S(t)$. Ceci signifie que, pour chaque t, la suite des nombres $\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega t}$ tend vers $S(t)$ lorsque $N\to\infty$. Alors:

- chacune des sommes $\sum_{n=1}^{N} c_n e^{in\omega t}$ et $\sum_{n=1}^{N} c_n e^{-in\omega t}$ n'a pas nécessairement une limite quand $N\to\infty$ (essayez de construire un contre-exemple)
- par contre la série des sinus et des cosinus sont séparément convergentes:

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega t} = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \xrightarrow{N\to\infty} S(t)$$

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{-in\omega t} = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos n\omega t - b_n \sin n\omega t) \xrightarrow{N\to\infty} S(-t)$$

En faisant la somme et la différence, on déduit que

- la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\omega t$ converge simplement vers $\frac{S(t)+S(-t)}{2}$
- la série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin n\omega t$ —— " —— vers $\frac{S(t)-S(-t)}{2}$.

Théorème 5. Si une série trigonométrique T-périodique converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors sa somme $S(t)$ est continue, T-périodique et les coefficients a_n, b_n, c_n vérifient

$S = \sum (x_n, S) x_n \Longleftrightarrow$ (analogue de (F1))

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T S(t)\, e^{-in\omega t}\, dt = (x_n, S)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T S(t) \cos n\omega t\, dt\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$a_0 = c_0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T S(t) \sin n\omega t\, dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Lemme 6 (de Riemann-Lebesgue).

Si φ est une fonction intégrable sur $[a, b]$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi(x) \sin nx\, dx = 0$$

§2. Séries de Fourier

Les relations précédentes nous conduisent à définir, $\forall f \in V_T$, les coeff. de Fourier :

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt = (x_n, f) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cos n\omega t\, dt \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$a_0(f) = c_0(f)$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \sin n\omega t\, dt. \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Ces coefficients vérifient (1).

On peut se demander s'il est possible de reconstituer f à partir de c_n : plus précisément, si l'on peut écrire f comme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{in\omega t}$.

On sait que 2 fonctions de V_T, égales sur la période sauf en un nombre fini de points, ont les mêmes $c_n(f)$ $\Longrightarrow$ la "reconstitution" nécessite des hypothèse restrictives sur f.

Propriétés

- $c_n(f), a_n(f), b_n(f) \xrightarrow{|n| \to \infty} 0$ (par lemme de Riemann-Lebesgue)

- f à valeurs réelles $\Longrightarrow$ $a_n(f), b_n(f) \in \mathbb{R}$

- propriétés de $c_n(f)$:

fonction	coeff. de Fourier
$f(t)$	$c_n(f)$
$\lambda f(t) + \mu g(t)$	$\lambda c_n(f) + \mu c_n(g)$
$f(t-\tau)$	$e^{-in\omega\tau} c_n(f)$
$e^{in_0\omega t} f(t)$	$c_{n-n_0}(f)$
$f(-t)$	$c_{-n}(f)$
$\overline{f(t)}$	$\overline{c_{-n}(f)}$

- si f est réelle paire:

$$a_n(f) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega t\, dt, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

$$a_0(f) = c_0(f) = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\, dt$$

$$b_n = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- si f est réelle impaire:

$$b_n(f) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega t\, dt \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$a_n(f) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

- si f est constante ($\forall t \in \mathbb{R}$ $f(t) = k$), alors $c_0(f) = k$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $c_n(f) = 0$.

Déf. 7. On appelle la série de Fourier de $f \in V_T$ la série trigonométrique

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{in\omega t}$$

Lorsqu'elle converge, on note $S_f(t)$ sa somme

Posons maintenant la question inverse : si $S_f(t)$ converge, représente-t-elle $f(t)$?

- première réponse : non (modification de f sur un ensemble fini de points d'une période ne change pas les coefficients de Fourier).
- Même la continuité de f n'assure pas la convergence de $S_f^N(t)$ vers $f(t)$ pour tout t.

D'autre part il existe des théorèmes qui donnent la réponse positive dans la plupart des situations pratiques.

§3. Théorèmes de convergence

Déf. 8 f est continue (respectivement monotone) par morceaux sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$ s'il existe un nombre fini de points $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_n = b$ tels que

- f est définie sur $[a,b]$ sauf peut être en certains de ces points,
- f est continue (respectivement monotone) sur chaque des intervalles (a_{j-1}, a_j) $(j = 1, \ldots, n)$.
- f admet en chaqun des points a_j $(j = 1 \ldots n-1)$ une limite finie à droite et à gauche (uniquement à droite pour a_0 et à gauche pour a_n).

Les limites à droite et à gauche seront notées respectivement $f(a_j+0)$ et $f(a_j-0)$. f est dite de classe C^1 par morceaux sur $[a,b]$ si :

- f et f' sont définies continues sur $[a,b]$ sauf peut être en un nombre fini de points.
- en chacun de ces points, f et f' admettent respectivement des limites finies à droite et à gauche.

Une fonction périodique est dite continue (ou monotone / ou C^1) par morceaux si elle vérifie les propriétés précédentes sur une intervalle-période.

Déf. 9. Partageons $[a,b]$ en un nombre fini d'intervalles : $a_0 = a < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$. La variation totale de f sur $[a,b]$, notée $V(f;[a,b])$, est la borne supérieure des sommes $\sum_{j=0}^{n} |f(a_{j+1}) - f(a_j)|$ calculée sur l'ensemble de toutes les décompositions de $[a,b]$ en un nombre fini d'intervalles. Si $V(f;[a,b])$ est finie, on dit que f est à variation bornée sur $[a,b]$ (en particulier toute fonction à variation bornée est intégrable).

Exemple 10.

1). toute fonction monotone bornée est à variation bornée $V = |f(b) - f(a)|$.

2). si f bornée n'a qu'un nombre fini de maxima et de minima relatifs entre a et b elle est à variation bornée ; donc la plupart des fonctions bornées rencontrées dans la pratique sont à variation bornée (pas toutes quand même ; contre-exemple : $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \in [0,1]$).

Théorème 11. Soit $f \in V_T$ une fonction T-périodique, C^1 par morceaux. La série de Fourier de f converge simplement pour tout t et a pour somme $\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$. On a donc

$$S_f(t) = \frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}.$$

Pour chaque point t où f est continue, $S_f(t) = f(t)$.

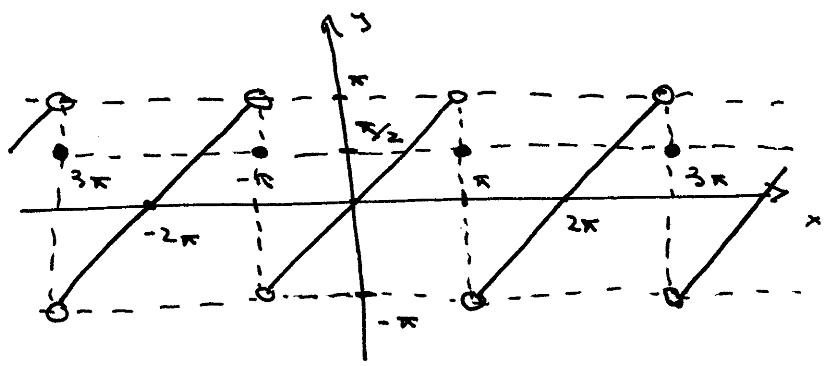
Théorème 12. Soit f T-périodique, continue sur $\mathbb{R}$, à dérivée continue par morceaux. Sa série de Fourier converge normalement (donc uniformément) vers f.

Théorème 13. Soit f T-périodique, à variation bornée sur une intervalle-période. Alors la série de Fourier de f converge pour tout t vers $\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$. De plus, la convergence est uniforme sur toute intervalle $[a,b]$ où f est continue.

Exemple 14. f, 2π-périodique, est définie par:

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{pour } t \in (-\pi,\pi) \\ f(\pi) = f(-\pi) = \pi/2. \end{cases}$$

f est monotone par morceaux, donc sa série de Fourier converge pour tout t.



Le calcul des coefficients de Fourier conduit à:

$$S_f(t) = 2\left(\sin t - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \dots\right) =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nt}{n}.$$

Le théorème 12 permet d'écrire: $\forall t \neq (2k+1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ on a $S_f(t) = f(t)$ puisque f est continue en ces points.

En particulier, $\forall t \in (-\pi,\pi)$:

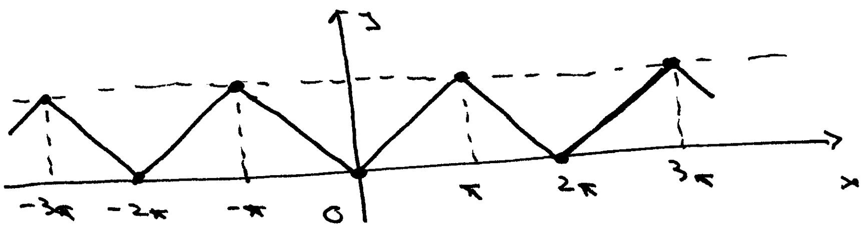
$$2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nt}{n} = t.$$

Pour $t=(2k+1)\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ chaque terme de la série est nul. On vérifie que la somme de la série de Fourier : $\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} = \frac{\pi+(-\pi)}{2} = 0$ et on note que

$$0 = S_f\left((2k+1)\pi\right) \neq f\left((2k+1)\pi\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Exemple 15. g, 2π-périodique, définie par :

$$g(t) = |t| \quad \text{pour } t\in[-\pi,\pi].$$



g est continue, à dérivée continue par morceaux. Sa série de Fourier donc converge normalement vers $g(t)$ sur $\mathbb{R}$. Le calcul des coefficients de Fourier conduit à :

$$S_g(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2} = g(t)$$

Cette égalité, écrite pour $t=0$, permet de calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Remarque 16 Pour $t\in[0,\pi)$, on a $S_f(t)=f(t)=g(t)=S_g(t)$.

A la différence des séries entières, deux séries trigonométriques peuvent avoir même somme sur une intervalle et ne pas être identique.

Explication : les coefficients de Fourier font intervenir les valeurs de f dans toute intervalle-période, contrairement aux coefficients du développement de Taylor qui ne font intervenir que les valeurs de f au voisinage du point où on effectue le développement.

§4. Égalité de Parseval

Théorème 17. Soit $f \in V_T$. La série des carrés des modules de ses coefficients de Fourier est convergente et vérifie l'égalité:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \, dt$$

Pour $f, g \in V_T$ on a:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{c_n(f)} \, c_n(g) = \frac{1}{T} \int_0^T \overline{f(t)} \, g(t) \, dt.$$

Remarque 18. Si on utilise $a_n(f)$ et $b_n(f)$ à la place de $c_n(f)$, les égalités deviennent:

$$|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \, dt.$$

$$\overline{a_0(f)} \, a_0(g) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\overline{a_n(f)} \, a_n(g) + \overline{b_n(f)} \, b_n(g) \right] =$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \overline{f(t)} \, g(t) \, dt.$$